Eben hierin liegt daher auch der entscheidende logische Grund für die beiden Hauptanwendungen, welche die Mathematik vom Begriff des Unendlichen macht: auf die Begründung der Irrationalzahl (§ 26) und auf die der Methode des Infinitesimalen (§ 27). Beide Probleme vereinigen sich in dem Probleme der Stetigkeit der Zahl.

§ 26. Stetigkeit und Irrationalzahl.

Auf Grund des unbeschränkten, aber dabei streng gesetzmäßigen Fortbestandes der Relationen der Zahl kann unter bestimmten Bedingungen ein Ausdruck, der eine Unendlichkeit einschließt, wie eine systematisch gebildete, konvergente Reihe, als ebenso bestimmt gelten wie ein endlicher Zahlausdruck, auch wenn der dadurch angezeigte Wert innerhalb der Reihe der rationalen Zahlen nicht existiert. Zwar wird diese Bestimmtheit nicht dadurch bewiesen, daß der gesuchte Wert sich zwischen zwei Gruppen rationaler Werte (A und B) so einschließen läßt, daß jede Zahl der einen diesseits jeder der andern Gruppe liegt und die Differenz der beiderseitigen Zahlen ($b-a$) kleiner gemacht werden kann als jede angebbare Zahl. Denn eben, daß das Intervall ($b-a$) ins Unendliche verringert werden kann, schließt ein, daß ein Intervall immer bleibt; durch ein Intervall wird aber nicht ein Wert als einziger bestimmt. Wohl aber ist, auf Grund eines solchen Beweises, der gesuchte Wert 1. mit keinem anderen, rationalen oder irrationalen Wert vertauschbar, und es kann 2. von jedem anderen Wert ausgemacht werden, ob er diesseits oder jenseits des gesuchten Wertes liegt. Und auf Grund dieses Verhalts kann gesagt werden, daß der gedachte, außer der rationalen Reihe liegende Wert zu dieser eine bestimmte Beziehung habe, die als eine Beziehung des Mehr und Weniger definiert werden kann durch eine Erweiterung dieser Begriffe, wonach das Mehr oder Weniger nicht notwendig durch eine geschlossene Gleichung bestimmt sein muß, sondern es genügt, wenn es durch ein System von Ungleichungen so nahe, als man will, bestimmbar ist. Ist diese Bedingung erfüllt, und ist zugleich der Ausdruck in sich vom ersten Glied an ins Unendliche eindeutig bestimmt, so kann gesagt werden, daß der fragliche Wert, obgleich