scharfsinniger Weise vor: Man setzte die Gültigkeit aller anderen geometrischen Axiome voraus, nahm aber an, daß das Parallelenaxiom *falsch* sei, daß man also zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb von ihr liegenden Punkt entweder *keine* oder *viele* Parallelen ziehen könne. Unter diesen Voraussetzungen entwickelte man in der üblichen Weise die besonderen Lehrsätze einer „Geometrie". Und nun sagte man sich: die unter der Voraussetzung der *Gültigkeit* aller *anderen* Axiome, aber der *Ungültigkeit* des *Parallelen*axioms entwickelten besonderen Sätze müssen entweder in sich logisch widerspruchsvoll oder in sich logisch widerspruchsfrei sein. Sind sie widerspruchs*voll* in sich, so ist bewiesen, daß das Parallelenaxiom eine logische Konsequenz der übrigen geometrischen Axiome, also „beweisbar" ist; sind sie widerspruchs*frei*, so ist das Parallelenaxiom als echtes Axiom, also als nicht aus den anderen geometrischen Axiomen ableitbar, als nicht durch sie beweisbar erwiesen. Denn es muß sich logischer Widerspruch ergeben, *wenn man als Grundlage der Beweisführung die Gültigkeit gewisser Sätze, aber zugleich die Ungültigkeit einer notwendigen Konsequenz dieser Sätze annimmt.*

Es ergab sich nun, daß sich eine „nicht-euklidische Geometrie" *frei* von inneren *logischen* Widersprüchen entwickeln läßt. Das heißt: Es führt nicht zu *logischem* Unsinn, wenn man alle anderen geometrischen Axiome als gültig ansieht, das Parallelenaxiom aber als ungültig.

Also ist das Parallelenaxiom nicht eine logische Konsequenz der anderen Axiome, also nicht aus ihnen ableitbar, nicht durch sie beweisbar, *also ein echtes für sich bestehendes „Axiom"*.

Ja, man konnte sogar zwei verschiedene in sich widerspruchsfreie nicht-euklidische Geometrien aufbauen, je

3*