populär und erregend gemacht hat, die am wenigsten von ihnen verstehen, ja, meist nicht einmal im geringsten ihre Bedeutung zu erfassen imstande sind.

2. Die Metageometrie. Die ursprüngliche Absicht der sogenannten „Metageometrie“ war eine rein logische.

Euklid, der große griechische Systematiker der Geometrie, hatte diese Wissenschaft auf eine Anzahl von „Axiomen“, das heißt unbeweisbaren Lehrsätzen, aufgebaut. Mehrere dieser Lehrsätze waren nicht eigentlich geometrisch, sondern arithmetisch, wie zum Beispiel der Satz „Gleiches um Gleiches vermehrt gibt Gleiches“. Aber andere waren in der Tat rein geometrische unbewiesene und, wie es schien, unbeweisbare Aussagen, und unter diesen spielte das sogenannte Parallelenaxiom eine besonders wichtige Rolle: Zu einer gegebenen Geraden kann man durch einen außerhalb liegenden Punkt nur eine Parallele ziehen, d. h. nur eine Linie, welche stets gleichen Abstand von der gegebenen Geraden hat und diese daher nie schneidet.

Schon gewisse Mathematiker des ausgehenden Altertums hatten die Frage aufgeworfen, ob dieses Parallelenaxiom nicht doch etwa beweisbar, also nicht eigentlich ein „Axiom“ sein möchte. In der Renaissance-Zeit, als die Wissenschaften wieder zu erblühen anfangen, hatte man diese Untersuchungen wieder aufgenommen, und in ganz besonderer Schärfe und Strenge geschah das im Beginne des neunzehnten Jahrhunderts durch einen Polen, Lobatschewsky, und durch die Ungarn Bolyai, Vater und Sohn. Später stellte es sich heraus, daß auch der große deutsche Mathematiker Gauß sich mit ähnlichen Ideen getragen hatte, ohne sie zu veröffentlichen.

Um zu prüfen, ob das Parallelenaxiom beweisbar, also aus den übrigen Axiomen der Geometrie ableitbar, also nicht ein „Axiom“ für sich sei, ging man nun in sehr

scharfsinniger Weise vor: Man setzte die Gültigkeit aller anderen geometrischen Axiome voraus, nahm aber an, daß das Parallelenaxiom falsch sei, daß man also zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb von ihr liegenden Punkt entweder keine oder viele Parallelen ziehen könne. Unter diesen Voraussetzungen entwickelte man in der üblichen Weise die besonderen Lehrsätze einer „Geometrie“. Und nun sagte man sich: die unter der Voraussetzung der Gültigkeit aller anderen Axiome, aber der Ungültigkeit des Parallelenaxioms entwickelten besonderen Sätze müssen entweder in sich logisch widerspruchsvoll oder in sich logisch widerspruchsfrei sein. Sind sie widerspruchsvoll in sich, so ist bewiesen, daß das Parallelenaxiom eine logische Konsequenz der übrigen geometrischen Axiome, also „beweisbar“ ist; sind sie widerspruchsfrei, so ist das Parallelenaxiom als echtes Axiom, also als nicht aus den anderen geometrischen Axiomen ableitbar, als nicht durch sie beweisbar erwiesen. Denn es muß sich logischer Widerspruch ergeben, wenn man als Grundlage der Beweisführung die Gültigkeit gewisser Sätze, aber zugleich die Ungültigkeit einer notwendigen Konsequenz dieser Sätze annimmt.

Es ergab sich nun, daß sich eine „nicht-euklidische Geometrie“ frei von inneren logischen Widersprüchen entwickeln läßt. Das heißt: Es führt nicht zu logischem Unsinn, wenn man alle anderen geometrischen Axiome als gültig ansieht, das Parallelenaxiom aber als ungültig.

Also ist das Parallelenaxiom nicht eine logische Konsequenz der anderen Axiome, also nicht aus ihnen ableitbar, nicht durch sie beweisbar, also ein echtes für sich bestehendes „Axiom“.

Ja, man konnte sogar zwei verschiedene in sich widerspruchsfreie nicht-euklidische Geometrien aufbauen, je

3*

nachdem man annahm, daß durch einen Punkt zu einer Geraden viele oder keine Parallele möglich seien. Der Satz, daß die Winkelsumme des Dreiecks zwei rechte Winkel betrage, ist bekanntlich aus dem Parallelenaxiom beweisbar, ist im Grunde dasselbe wie dieses Axiom. Die „nicht-euklidischen“ Geometrien lassen sich daher auch so kennzeichnen, daß in der einen dieser Geometrien die Winkelsumme des Dreiecks kleiner, in der anderen aber größer als zwei rechte Winkel ist.

Soweit ist mit der „Metageometrie“ in der Tat alles in Ordnung; sie ist eine Leistung von ganz außerordentlichem Scharfsinn.

Aber nun ging man weiter. Man wollte sich die Gebilde der nicht-euklidischen Geometrien anschaulich vorstellen, ebenso wie man sich ein Dreieck, eine Ellipse, einen Kreis anschaulich als Gebilde im Raum vorstellen und mit Raumesausdrücken wie „gerade“, „gekrümmt“ usw. beschreiben kann.

Der Begriff der „Krümmung“ spielt eine besondere Rolle dabei. Jeder Anfänger in der Geometrie weiß, was dieser Begriff im Rahmen der euklidischen Geometrie mit Rücksicht auf Linien und Flächen bedeutet: ein Kreis, eine Ellipse einerseits, eine Kugeloberfläche, eine Eioberfläche, ein Ellipsoid andererseits sind „gekrümmt“, und zwar haben, um hier nur auf gekrümmte Linien Bezug zu nehmen, Kreise überall gleiche Krümmung, während bei einer Ellipse oder Parabel an den verschiedenen Stellen ein verschiedenes „Krümmungsmaß“ besteht, das durch die Größe des Radius des sogenannten Krümmungskreises gemessen wird, das heißt durch die Größe des Radius desjenigen Kreises, welcher die in Frage stehende Kurve an ihren verschiedenen Orten von innen „berührt“, das heißt auf eine „unendlich kleine“ Strecke hin mit ihr denselben Verlauf hat. Je größer der Radius des Krümmungs-

kreises ist, um so geringer ist das Krümmungsmaß der Kurve an der in Rede stehenden Stelle.

Die Begriffe „Krümmung“ und „Krümmungsmaß“ wendet man nun auf „den Raum“ an. Wie Linien und Flächen gekrümmt sein können in verschiedenem Maße, so sollen auch Raumteile als solche in verschiedenem Maße als gekrümmt gedacht werden können.

Hier muß ein grobes Mißverständnis von vornherein ferngehalten werden: Nicht darum handelt es sich, daß eine Fläche, etwa die Oberfläche eines Ellipsoides oder Eies, im dreidimensionalen Raum gekrümmt ist, sondern der Raum, das „Dreidimensionale“ soll als in verschiedenem Maße und in verschiedenem Sinne („positiv“ oder „negativ“) gekrümmt angesehen werden.

Es ergibt sich dann, daß der Raum bei der einen der beiden Metageometrien eine positive Krümmung von bestimmtem Maße besitzt, bei der anderen eine negative, während das Krümmungsmaß des euklidischen Raumes (d. h. ein dem Krümmungsmaß von Flächen analog definierter, rein analytischer Ausdruck) gleich Null ist.

Die euklidische Geometrie ist also ein „ausgezeichneter“ Fall unter der Fülle der „möglichen“ Geometrien und zwar der logisch einfachste Fall. Anders gesagt: Im Rahmen der euklidischen Geometrie brauchen wir uns keine besondere Zahl für die Krümmung des Raumes zu merken, während wir für jede andere Form von Geometrie eine besondere Zahl, nämlich die Maßzahl der Krümmung, im Gedächtnis behalten müßten.

Nur beiläufig bemerke ich an dieser Stelle, daß die Metageometer die alte euklidische Geometrie auch noch in anderer Hinsicht „erweitert“ haben. Die euklidische Geometrie kennt bekanntlich nur einen Raum von drei sogenannten „Dimensionen“, das heißt aufeinander senkrechten Richtungen. Mehr Dimensionen „gibt es nicht“ für

sie. Hier sagt uns nun die Metageometrie, daß Räume von mehr als drei Dimensionen, also von 4, 5, 6 usw., ja von unendlich vielen Dimensionen denkbar seien.

Wir kehren nach dieser kurzen Abschweifung zur Metageometrie, insoweit sie die Krümmung „des Raumes“ angeht, zurück.

Und hier werfen wir nun die sehr einfach lautende, aber folgenschwere Frage auf: Ist denn die nicht-euklidische Geometrie überhaupt „Geometrie“, das soll heißen Wissenschaft vom Raum? [Wörtlich übersetzt heißt Geometrie bekanntlich Erdmeßkunst.]

Wir beginnen mit der Erörterung der Sonderfrage, ob man sich die Gedankengebilde der Metageometrie anschaulich vorstellen, ob man ihr Wesen in Anschaulichkeit erfassen könne, so wie man das Wesen von Kugel, Würfel, Dreieck, Ellipse in Anschaulichkeit erfaßt, wobei die Bedeutung des Wortes „Anschaulich“ nicht weiter definierbar, sondern als phänomenologisches Urphänomen hinzunehmen ist.

Eine anschauliche Erfassung „gekrümmter“ Räume oder der Sondergebilde in einem „gekrümmten“ Raum ist nun ganz und gar unmöglich, und zwar deshalb, weil „unser Raum“ nun einmal nur drei, aber nicht mehr Dimensionen für die Anschauung besitzt. Wir wissen anschaulich, was eine gekrümmte Linie ist, weil wir wissen, was „zweite“ Dimension heißt, welche die Voraussetzung für die Krümmung einer Linie (im einfachsten Falle) ist. Wir wissen auch anschaulich, was Krümmung einer Fläche bedeutet, weil wir deren notwendige Voraussetzung, die „dritte“ Dimension, anschaulich unmittelbar kennen.

Aber von einer „Krümmung“ des Raumes zu reden ist phänomenologisch-anschaulich ein vollkommenes Unding, weil „vierte“ Dimension, deren anschauliches Erfassen hier die notwendige Voraussetzung sein würde, phänomenologisch nicht existiert.

Man hat nun freilich gelegentlich versucht, besondere Einzelgebilde der nicht-euklidischen Geometrie sozusagen im euklidischen, also nicht-gekrümmten, dreidimensionalen Raume abzubilden. Aber dabei handelte es sich doch nie um die nicht-euklidischen Gebilde als Ganzes. Sondern man stellte entweder irgend einen nebensächlichen Teil eines nicht-euklidischen Gebildes euklidisch dar, so wie man ja Schnitte durch einen dreidimensionalen Körper auf einer Ebene darstellen kann, weil sie eben flächig sind, oder aber man „projizierte“ sozusagen die ganzen nicht-euklidischen Gebilde auf die dritte Dimension, so wie man von einem Körper von drei Dimensionen seine „Projektion“ auf eine Ebene zeichnen kann.

Ich meine sogar, diese Versuche, nicht-euklidische Gebilde euklidisch zu veranschaulichen, haben, entgegen den Absichten ihrer Urheber, ganz besonders deutlich die radikale Unanschaulichkeit der nicht-euklidischen Gebilde als solcher gezeigt; mehr vielleicht als alles andere!

Was nun folgt aus dieser ganzen Sachlage?

Etwas sehr Bedeutsames, wie mir scheint, nämlich dieses, daß die sogenannte nicht-euklidische oder Meta-geometrie gar keine „Geometrie“, das soll heißen, gar keine Wissenschaft vom Raume ist, sondern etwas anderes.

Aber was ist sie denn?

Man erinnere sich hier unserer Behauptung, daß ursprünglich alle Metageometrie nur aus logischen Gründen im Rahmen der euklidischen Geometrie betrieben wurde: man wollte prüfen, ob das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen beweisbar oder ein echtes Axiom sei. Man fand das zweite, denn es führte nicht zu Widersprüchen in sich, wenn man ein Gefüge von Lehrsätzen entwickelte auf der Basis der Gültigkeit der anderen Axiome, aber der Ungültigkeit des Parallelenaxioms; da konnte das letzte nicht wohl

die „Konsequenz“ der anderen sein; das hätte sich in inneren Widersprüchen zeigen müssen.

Erst als der Begriff der „Krümmung“ des Raumes eingeführt wurde, wurde die neue Lehre angeblich selbst „geometrisch“, handelte sie von den „möglichen Räumen“, unter denen der euklidische Raum ein ausgezeichneter, nämlich der einfachste, Fall sei.

Was hatte man nun in der ersten, der bewußt logischen Phase der Metageometrie, ja, was hatte man auch in der zweiten, der angeblich geometrischen Phase dieser Wissenschaft eigentlich getan:

Man hatte nur die Besonderheiten allgemein beziehungstheoretischen (relationstheoretischen) Charakters aus den Axiomen herausgelöst und studiert, ohne das eigentlich „Geometrische“ an ihnen, welches nur anschaulich gegeben ist, zu berücksichtigen. Im Rahmen dieses rein Relationstheoretischen hatte man dann gewisse Variationen, eben bezüglich des Parallelenaxioms, eingeführt, welche im eigentlich geometrischen Sinne nicht realisiert, welche, wie ich sagen möchte, nicht „durch geometrische Daten erfüllt“ sind, und hatte gezeigt, daß das keinen inneren Widerspruch zur Folge hat.

Geometrisch erfüllt ist dasjenige reine Beziehungsverhältnis, welches, wenn so erfüllt, „Krümmung“ genannt wird, für die Linie und für die Fläche. Man nannte nun dasselbe reine Beziehungsverhältnis für den Raum, welches geometrisch nicht erfüllt ist, ebenfalls „Krümmung“ und meinte so mögliche nicht-euklidische „Räume“ entdeckt zu haben. Tatsächlich hatte man nur ein Problem der reinen Relationstheorie behandelt und dabei das Wort „Krümmung“ etwas unvorsichtig, nämlich nicht nur, was wohl erlaubt gewesen wäre, analogienhaft-bildlich, angewendet.

Hatte doch schon die von Descartes stammende sogenannte analytische Geometrie, welche die Geometrie, wie

man sagt, „arithmetisiert“, von der Anschauung in sehr erheblicher Weise „sich befreit“. Warum sollte man hier nicht weitergehen?

Man übersah, daß schon die angeblich die Geometrie arithmetisierende analytische Geometrie keine „Geometrie“ mehr ist, daß schon sie nichts tut, als gewisse Beziehungen der reinen Relationstheorie studieren, freilich solche, welche „geometrisch erfüllt“ sind.

Die Metageometrie hat also in sehr schöner Weise ein Kapitel der allgemeinen Relationstheorie ausgebaut, darf sich aber nicht so nennen, wie sie sich nennt, nämlich nicht „Geometrie“.

Was aber ist nun allgemeine Relationstheorie oder Beziehungslehre?

Sie ist, um das Kantische Wort einmal zu verwenden, eine aprioristische, das heißt nicht von Empirie abhängige und andererseits apodiktische, absolut sichere Lehre recht neuen Datums. Sie ist in ihren Anfängen. Sie handelt von allen Besonderheiten, welche im Bereiche des Begriffs Beziehung aus dem Wesen dieses Begriffs heraus „gesetzt“, populär gesprochen „gedacht“, werden können.

Die Begriffe Beziehung und Bezogen selbst sind nicht definierbar, sie können nur in ihrer Bedeutung „geschaut“ werden.

Aber wenn ich sie „schaue“, so schaue ich zugleich, so weiß ich zugleich, was für Möglichkeiten von Beziehung besonderer Art es geben kann. Ich bedarf dazu freilich gewisser anderer Begriffe, deren undefinierbare Bedeutung ich ebenfalls endgültig schaue, zum Beispiel gleich, ungleich, viele usw.

Da kann ich also etwa die Begriffe der wechselseitiggleichen und der einseitigen Beziehung bilden. „Bruder-Bruder“ ist ein Beispiel für das erste: Wenn A der Bruder von B ist, so ist auch B der Bruder von A . Aber „Vater-

Sohn“ ist eine einseitige Beziehung, denn wenn A der Vater von B ist, so ist nicht B der Vater von A .

Das, wo zwischen Beziehung (Relation) besteht, heißt Glied (Relat). Ich kann nun auch den Begriff der Reihe setzen und sie definieren als ein zusammengesetztes Gebilde von Gegenständen, in welchem stets eine Beziehung zwischen zwei Gliedern und ein Glied zwischen zwei Beziehungen steht.

1, 2, 3, 4, 5 usw. ist zum Beispiel eine „Reihe“. Ein bestimmtes „Soviel“, eine „Zahl“, steht hier immer zwischen zwei Beziehungen; eine Beziehung, und zwar die Beziehung mehr, steht zwischen zwei Gliedern.

In diesem Beispiel sind die Glieder alle verschieden (1, 2, 3 etc.), die Beziehungen sind aber alle gleich, nämlich „um 1 mehr“. In der Reihe: 1, 3, 8, 13, 100 ist das zweite nicht der Fall.

Ohne weiteres ergeben sich die Begriffe der gleichgliedrigen, ungleichgliedrigen, gleichbeziehlichen, ungleichbeziehlichen Reihe und ihre möglichen Kombinationen.

Und sehr viele andere Begriffe sind hier noch setzbar. Hervorgehoben sei der Begriff der übergreifenden oder transitiven Reihe; eine solche besteht, wenn das Wesen der Reihe durch Fortlassen beliebiger Glieder nicht gestört wird. Die Reihe 1, 3, 8, 13, 100, 124 ist zum Beispiel mit Rücksicht auf die Beziehung „mehr“ transitiv, denn wenn ich etwa die Zahlen 8 und 100 streiche, so bleibt im Rest die Beziehung „mehr“ ungestört.

Auch die für die Lehre vom Syllogismus so wichtige Reihe, welche sich auf den Begriff des Inhaltseinschlusses aufbauen läßt, ist transitiv. Wenn ich zum Beispiel in der Reihe: „Quadrat von 4 cm Seitenlänge $\rightarrow$ Quadrat $\rightarrow$ Rhombus $\rightarrow$ Parallelogramm $\rightarrow$ Viereck $\rightarrow$ Eck $\rightarrow$ ebene Figur“ die Begriffe „Rhombus“ und „Viereck“ weglasse, so bleibt die Reihe transitiv, das heißt: auch dann noch schließt jeder frühere Begriff in der Reihe den folgenden inhaltlich ein.

Man kann nun den Reihenbegriff nach zwei Seiten weiter ausbauen.

Erstens kann man sagen: von jedem Glied einer Reihe soll eine neue Reihe ausgehen, und so fort. Dann bekommt man Beziehungskomplexe, die man bildlich als zwei-, drei-, vier-, fünf- usw. „dimensional“ bezeichnen darf, weil die zwei- und drei-dimensionalen Gebilde der Geometrie Illustrationen, „Erfüllungen“ zu ihnen sind, während freilich die höheren Relations-Dimensionen nicht „geometrisch erfüllt“ werden.

Zweitens aber kann bildlich der Begriff der Richtung in die Lehre von den Reihen eingeführt werden, und zwar mit allem, was er in sich birgt, also auch mit der relationstheoretischen begrifflichen Grundlage des geometrischen Begriffs der „Krümmung“; aber nicht nur er, sondern auch der Begriff des „Senkrechtstehens“, der „Parallele“, des „Winkels“ und vieles andere. Ja, wenn wir hier ins Einzelne gehen und etwa den Begriff der Krümmung streng definieren wollten — ein ziemlich kompliziertes Unternehmen —, so würden wir wohl nicht umhin können, vorher das zu definieren, was in der unvermeidlich bildlichen Sprache der reinen Relationstheorie die Namen „Abstand“, „gleicher Abstand“, „senkrecht stehen“ trägt.

Man wird sagen, diese ganze Relationstheorie sei eine große Selbsttäuschung. Das sei ja alles „Geometrie“; alle Worte seien Raumesworte, alle Beispiele Raumesbeispiele. Zugegeben, daß das letzte richtig ist. Aber „Geometrie“ ist darum die Relationstheorie doch ganz und gar nicht. Es ist nur leider so, daß überall unsere allzumenschliche Natur mit hineinspielt, die uns zwingt, immer Raumbeispiele und Raumworte unterzuschieben, wenn wir eigentlich etwas viel Allgemeineres meinen. Hat doch Bergson gezeigt, daß wir sogar beim Zählen, ja, bei aller Arithmetik immer Raumbilder unterschieben, um unsere

Gedanken zu fixieren, obwohl weder der Begriff des Soviel, der „Zahl“, noch der Begriff des Mehr auch nur irgend etwas mit dem Raume zu tun hat.

Man sieht nun wohl, wie es mit der „Arithmetisierung“ der Geometrie durch die sogenannte „analytische“ rechnende Geometrie bestellt ist: hier wird nicht die Geometrie, nicht das Geometrische, d. h. das Raumhafte arithmetisiert, sondern nur dasjenige an der Geometrie, dessen relations-theoretische Erfüllung sie ist.

Und in der sogenannten Metageometrie ist alles ganz ebenso, nur daß hier kompliziertere relationstheoretische Gebilde in Frage kommen, als die übliche analytische Geometrie sie behandelt, und daß zweitens die Meta-geometrie nicht, wie die übliche Analysis, aus gegebenen geometrischen Daten das Relationstheoretische herauszieht, sondern ohne solche Daten relationstheoretische Möglichkeiten frei erwägt.

Das ist eine schöne scharfsinnige Leistung — nur ist es keine „Geometrie“.

Aber nun kommen wir zu einer neuen wichtigen Frage: Warum ist das denn „keine Geometrie“? Woher wissen wir das so genau? Woher kommt denn unser Wissen vom Raum als Raum, und wie ist es beschaffen?

Diese Erwägungen werden uns nun bald wieder zu unserem eigentlichen Problem, der allgemeinen Relativitätstheorie und zu ihrer Kritik, zurückführen, von dem wir allzuweit abgeschweift zu sein scheinen — freilich nur „scheinen“.

Als ich oben von der allgemeinen Relationstheorie sprach, sagte ich einmal, daß sie handele „von allen Besonderheiten, welche im Bereiche des Begriffs Beziehung aus dem Wesen dieses Begriffs heraus gesetzt werden können“. Es ergab sich da eine ganze Fülle solcher möglicher Besonderheiten.

Nun — auch aus dem Wesen der Bedeutung „Raum“ heraus wird sich eine Fülle solcher Möglichkeiten ergeben, zugleich aber die sichere Einsicht, daß es den nicht-euklidischen gekrümmten Raum nicht „gibt“.

Die Worte „Raum“, „räumlich“, „ausgedehnt“ usw. bezeichnen etwas, das wir ganz unmittelbar bewußt besitzen, und zwar etwas, das als Qualität bezeichnet werden kann, obwohl in etwas anderem Sinne als die eigentlichen Qualitäten wie rot, grün, sauer, warm usw. Der beste Ausdruck für das, was gemeint ist, scheint mir das Wort neben zu sein: unter dem allen, was ich als Gegenstand erlebe, ist vieles „neben“ einander.

Neben ist undefinierbar, ebenso wie eine echte Qualität; es ist eine Beziehung, aber eine solche von ganz bestimmtem undefinierbarem Sosein; eben deshalb kann es selbst als Qualität bezeichnet werden. Es gehört auch zum Wesen der Qualität Neben, daß alles, was nebeneinander ist, „da draußen“ ist — auch das ist undefinierbar.

Ich weiß nun weiter unmittelbar über die Qualitätsbeziehung neben, daß sie eine Beziehungsform von der dreidimensionalen Art darstellt, wobei der Begriff „dreidimensional“ in der allgemeinen Relationslehre definiert ist. Neben „erfüllt“ anschaulich das abstrakte allgemeine Beziehungsgebilde „dreidimensional“.

Die Lehre von den einzelnen Erlebnisdaten, welche den Begriff des dreidimensionalen Neben für mich schaffen, gehört in die Psychologie. Wir sagen hier nur das Folgende: Die Begriffe „hier“ und „dort“, also das Null-dimensionale in Bezug auf den Raum, werden mir gegeben zugleich mit den sogenannten Berührungs- und Gesichtsempfindungen. Die „erste“ Dimension, die Linie, und ebenso die Fläche, erlebe ich zugleich mit Gesichts- und Bewegungsempfindungen, die „dritte“ Dimension, die sogenannte Tiefe,

nur im Anschluß an Bewegungsempfindungen, zum Beispiel meiner Arme und Beine.

Ich „sehe“ also die Tiefendimension nicht, obwohl ich sie „erlebe“ oder, ganz streng gesprochen, bewußt habe. Man darf hier nicht vergessen, daß das sogenannte Sehen nur bei ganz unbewegtem Auge ein reines „Sehen“ ist; praktisch bewege ich, wenn ich sehe, stets zugleich mein Auge, und eben die dabei erlebten Bewegungsempfindungen geben mir die dritte Dimension des Neben, außer den beiden anderen, welche ich auch durch andere Daten, wie gesagt, gewinne.

Alles, was bis hierher über unser Wissen vom Raume gesagt ward, kann unter den Kantischen Begriff der „reinen Anschauung“ gebracht werden. Was „dreidimensionaler Raum“ ist, weiß ich durch reines Schauen von der „anschaulichen“ Art, ganz ebenso wie ich weiß, was rot, warm und süß ist, wobei „anschauen“ aber, wie gesagt, nicht mit „sehen“ verwechselt werden darf. Auch mit „schauen“ im allgemeinsten Sinne darf es nicht verwechselt werden, denn „geschaut“ in diesem Sinne werden auch „unanschauliche“ Bedeutungen, z. B. was nicht, was weil, was bezogen heißt.

Nun haben wir aber gesagt, daß Neben zwar Qualität, aber zugleich Beziehungsform ist. Es ist, streng gesprochen, Träger eines Systems von Beziehungen oder auch „Rahmen“ eines Beziehungsgefüges, nämlich des geometrischen. Im Raum „gibt“ es alle die Gebilde, von denen die Geometrie handelt; das heißt: in dem allgemeinen Beziehungsgefüge „dreidimensionaler Raum“ schaue ich alle die besonderen Beziehungsarten, von denen die geometrische Wissenschaft handelt, als möglich.

Die grundlegenden unter diesen „möglichen“ besonderen Beziehungen sind nun diejenigen, welche in den Axiomen des Euklid ihren Ausdruck finden, insbesondere also der

Satz, daß die Gerade die „kürzeste“ sei, und daß es zu einer Geraden durch einen außerhalb von ihr gelegenen Punkt nur eine Parallele gibt.

Auch das weiß ich mit absoluter Endgültigkeit durch „reine Anschauung“. Mit dem Wissen um das, was Raum ist, also mit dem Wissen um das Wesen des Raumes, weiß ich zugleich um die Gültigkeit und zwar die absolute „unverbesserbare“ Gültigkeit der euklidischen Axiome.

Nun richtet sich aber das reflektierende analytische Denken auf das Ergebnis dieser unmittelbaren Wesensschau. Dieses analytische Denken macht sich klar, daß ja der Raum ein dreidimensionales Beziehungsgefüge besonderer Art ist, daß „Raum“ den viel allgemeineren Begriff „dreidimensionales Beziehungsgebilde“ anschaulich erfüllt, und da sagt es sich nun dieses: Dreidimensionale Beziehungsgebilde können, wie alle, auch schon die einfachsten eindimensionalen, zusammengesetzten Gefüge von Beziehungen, „eben“ oder in bestimmtem Maße „gekrümmt“ sein. Mein Raum, in dem ich die Gültigkeit des Parallelenaxioms schaue, ist ganz offenbar nicht „gekrümmt“, hat das Krümmungsmaß O , ist also ein ausgezeichneteter, ein einfachster Fall — nicht zwar mit Rücksicht auf andere mögliche „Räume“, wohl aber mit Rücksicht auf mögliche andere dreidimensionale „Beziehungsgefüge“. Denn von anderen möglichen „Räumen“ zu reden, im eigentlichen Sinne des Wortes Raum, ist sinnlos.

Man sieht: Die gleichsam instinktive Wesenserfassung vom Raum mit allen seinen Besonderheiten ist das Erste, die Erkenntnis, daß in diesen Besonderheiten ein schon gekanntes allgemeines Beziehungsschema „erfüllt“ zum Ausdruck kommt, ist das Zweite. Es ist nicht ohne Interesse hier beiläufig zu erwähnen, daß in einem der Geometrie sehr fern gelegenen Gebiet, in der Ethik, ganz ähnliche Verhältnisse vorliegen: auch hier folgt der unmittelbaren

Schau des „Guten“ die analysierende Reflexion darüber, was gut eigentlich heißt.

Wir haben oben gesagt, das Wissen um dreidimensionalen Raum überhaupt und um die in ihm zum Ausdruck kommenden „Axiome“ lassen sich wohl dem Kantischen Begriff der reinen Anschauung zuordnen. Es lassen sich nun die Axiome selbst einem anderen Begriff der Philosophie Kants zuordnen, nämlich dem Begriff des „synthetischen Urteils a priori“. Es liegt nicht in dem Subjekts-Begriff „Die Gerade“, daß von ihr das Prädikat „ist die kürzeste“ gilt; und das ist doch ganz sicher. Ich würde zwar den vorliegenden Sachverhalt einfacher ausdrücken und sagen: im Rahmen der Geometrie weiß ich ohne „Empirie“ in Endgültigkeit über die notwendige Zusammengehörigkeit gewisse Eigentümlichkeiten, ohne daß doch dieses absolut sichere („apodiktische“) Wissen lediglich auf dem Satze vom Widerspruche ruht. Denn daß mein Wissen in die Form eines Urteils („ S ist P “) gebracht werden kann, ist offenbar eine Nebensache.

Wir müssen uns nun zwei sehr wichtigen besonderen Fragen zuwenden; erstens müssen wir das „gesehene“ Neben vom „rein angeschauten“ oder, schlicht gesagt, „gehabten“ Neben trennen, zweitens müssen wir uns fragen, wie sich denn das allgemein rein angeschaute Neben zu dem Raum der Natur stelle.

Der gesehene Raum, bei dem, wie gesagt, nur zwei Dimensionen in Frage kommen, ist etwas ganz anderes als der allgemeine „gehabte“ oder rein angeschaute Raum. Im gesehenen Raum laufen Parallelen aufeinander zu, wie jeder feststellen kann, der sich Eisenbahnschienen näher betrachtet. Das Parallelenaxiom wird also mit absoluter Evidenz auf Grund „reiner Anschauung“ ausgesprochen dem Zeugnis des Gesichtsinnes entgegen! Wer das nicht begreift, hat den Begriff der „reinen Anschauung“,

des allgemeinen endgültigen Wesen-Habens, nicht verstanden. Dieses „Haben“ von Wesen ist nicht „Sehen“, ist viel mehr als Sehen, und zwar sogar, ehe die reflektierende Analysis, die uns den Raum als ausgezeichneten einfachsten Fall erkennen läßt, einsetzt.

Gesehener Raum und rein wesenhaft geschauter Raum sind also zweierlei Gegenstände.

Der rein wesenhaft geschaute Raum und der Raum der empirischen Wirklichkeit, insofern sie Natur (nicht Innenleben) ist, oder kurz der Naturraum, sind aber dasselbe Ding!

Denn alles, was ich von „Natur“ weiß, geht letzthin zurück auf ganz unmittelbar bewußt Erlebtes, soweit dieses irgend ein Raumeszeichen an sich trägt, also „hier“ oder „dort“ ist, „so groß“, „so lang“, „von hier nach dort bewegt“ usw. Kurz: Alle letzten Data für unser Wissen um Natur sind Aussagen darüber, daß „Jetzt — Hier — ein Solches ist“ oder, ganz kurz: Aussagen von der Form „Jetzt — hier — so“.

Der Naturraum also ist der allgemeine rein angeschaute Raum, ausdrücklich als „dieser Eine fest fixierte“ angesehen oder auch als „dieser Eine mit diesem (praktisch freilich nicht bestimmbar) festen Bezugssystem (Koordinatensystem)“.

Weil nun also der Naturraum der allgemeine rein angeschaute Raum, unter bestimmtem Gesichtspunkt betrachtet, ist, und weil für den allgemeinen rein angeschauten Raum die euklidische Geometrie mit absoluter Wesensevidenz gilt, so gilt auch für den Naturraum die euklidische Geometrie mit absoluter Wesensevidenz, und die Frage, „ob“ wohl die euklidischen Axiome für den Raum der Physik gelten möchten oder nicht, ist von vornherein eine Frage ohne jeden Sinn. Ich

weiß um wenige Dinge so sicher, wie ich um die absolute Gültigkeit der euklidischen Geometrie für die Physik weiß.

Jene Frage nach der Gültigkeit oder Ungültigkeit der euklidischen Geometrie für die Physik aufwerfen bedeutet in der Tat nichts anderes, als es bedeuten würde zu fragen: Gilt der Satz der allgemeinen Farbenwissenschaft, daß Rot dem Gelb ähnlicher ist als dem Grün, auch für die Naturfarben? Man weiß gar nicht, was das heißen soll, meine ich. Man sollte es auch bei der angeblichen geometrischen Frage nicht wissen!

3. Die Kritik der Theorie. Damit nun kommen wir endlich unmittelbar auf unser Thema, die Kritik der allgemeinen Relativitätstheorie Einstein's, zurück. Unsere eingehenden Vorarbeiten erlauben uns, jetzt ganz kurz zu sein; denn alles für die Kritik Wesentliche ist implicite erledigt.

Einstein wirft die Frage auf, „ob“ der Naturraum ein euklidischer Raum sei oder nicht, und verneint die Frage, weil er durch Annahme des nicht-euklidischen Wesens des Raumes die Gravitation „erklären“ zu können glaubt. Überall, wo Materie ist, soll der Raum der Natur nicht-euklidisch sein, ja, er soll das sogar an verschiedenen Orten in verschiedenem Maße sein, wohl gar an unendlich wenig voneinander verschiedenen Orten in verschiedenem Maße, so daß Einstein geradezu von einem „Raummollusk“ redet.

Wo nun schon die Frage keine legitime „Frage“ ist, ist die Antwort natürlich keine legitime Antwort!

Die Frage war übrigens schon von dem Mathematiker Gauß aufgeworfen worden, und er hatte versucht, sie durch Messung zu entscheiden, d. h. zu entscheiden, ob die Winkelsumme eines von drei weit voneinander entfernten Orten gebildeten Naturdreiecks gleich 2 Rechten sei. Er fand 2 Rechte. Er sah nicht, daß auch, wenn seine Messung